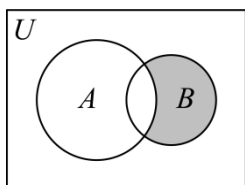


## 基础 1

### 一、单选题

1. 设全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ， $B = \{6, 7, 8\}$ ，则图中的阴影部分表示的集合为（ ）



A.  $\{6, 8\}$

B.  $\{6, 7, 8\}$

C.  $\{1, 3, 5\}$

D.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

【答案】A

【难度】0.94

【知识点】交集的概念及运算、补集的概念及运算、利用 Venn 图求集合

【分析】根据给定条件，结合韦恩图求出集合.

【详解】全集  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ，集合  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ，则  $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8\}$ ，

$B = \{6, 7, 8\}$ ，由韦恩图得  $(\complement_U A) \cap B = \{6, 8\}$ .

故选：A

2. 已知实数  $a, b, c$ ，则“ $ac^2 \geq bc^2$ ”是“ $a \geq b$ ”的（ ）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【难度】0.85

【知识点】判断命题的必要不充分条件

【分析】根据充分条件和必要条件的定义判断.

【详解】若  $ac^2 \geq bc^2$ ，当  $c = 0$  时，无论  $a, b$  为何值， $ac^2 = bc^2 = 0$  成立，此时无法判断  $a, b$  的大小，则充分条件不成立，

若  $a \geq b$ ，两边同乘以大于等于零的数，根据不等式的性质可知  $ac^2 \geq bc^2$ ，则必要性成立，

故选：B.

3. 下列说法中正确的是（ ）

- A. 具有线性相关关系的变量  $x, y$ ，其线性回归方程为  $y = 0.2x - m$ ，若样本的中心  $(m, 3.2)$ ，则  $m = 4$
- B. 数据 3, 4, 2, 8, 1, 5, 8, 6 的中位数为 5
- C. 将一组数据中的每一个数据加上同一个正数后，方差变大
- D. 若甲、乙两组数据的相关系数分别为  $-0.91$  和  $0.89$ ，则甲组数据的线性相关性更强

【答案】D

【难度】0.85

【知识点】计算几个数的中位数、各数据同时加减同一数对方差的影响、相关系数的意义及辨析、根据样本中心点求参数

【分析】把样本点的中心坐标代入线性回归方程，求出  $m$  判断 A；由中位数的计算公式即可判断 B；由方差的性质即可判断 C；由相关系数  $r$  的意义即可判断 D.

【详解】对于 A, 把  $(m, 3.2)$  代入  $y = 0.2x - m$ ，可得  $3.2 = 0.2m - m$ ，解得  $m = -4$ ，故 A 错误；

对于 B, 数据 3, 4, 2, 8, 1, 5, 8, 6，即 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 8 的中位数为

$$\frac{4+5}{2} = 4.5, \text{ 故 B 错误；}$$

对于 C, 将一组数据中的每一个数据加上同一个正数后，方差不变，故 C 错误；

对于 D, 若甲、乙两组数据的相关系数分别为  $-0.91$  和  $0.89$ ，因为  $|-0.91| > |0.89|$ ，则甲组数据的线性相关性更强，故 D 正确.

故选：D.

## 二、填空题

4. 已知复数  $z = 2i(1 - 3i)$ ，则  $z$  的共轭复数  $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

【答案】 $6 - 2i$

【难度】0.85

【知识点】复数代数形式的乘法运算、共轭复数的概念及计算

【分析】先根据复数的乘法得出复数，再应用共轭复数的定义求解.

【详解】因为复数  $z = 2i(1 - 3i) = 2i - 6i^2 = 6 + 2i$ ，

则  $z$  的共轭复数  $\bar{z} = 6 - 2i$ .

故答案为： $6 - 2i$ .

5. 已知 $\left(\frac{1}{x}+ax^2\right)^6$ 展开式中的常数项是540, 则实数 $a$ 的值为\_\_\_\_\_

【答案】 $\pm 6$

【难度】0.65

【知识点】由项的系数确定参数

【分析】利用二项式定理求出 $\left(\frac{1}{x}+ax^2\right)^6$ 的展开式的通项, 令 $x$ 的指数为0, 求出常数项, 建立关于 $a$ 的方程, 即可求解.

【详解】由题意得,  $\left(\frac{1}{x}+ax^2\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k\left(\frac{1}{x}\right)^{6-k}(ax^2)^k=a^kC_6^kx^{3k-6}$ ,

令 $3k-6=0$ , 解得,  $k=2$ ,

所以 $\left(\frac{1}{x}+ax^2\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $a^2C_6^2=15a^2=540$ ,

解得 $a=\pm 6$ .

故答案为:  $\pm 6$ .

6. 函数 $y=\sqrt{2\sin^2x+\cos x-1}$ 的定义域为\_\_\_\_\_.

【答案】 $\{x|2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\}$

【难度】0.65

【知识点】已知正(余)弦求余(正)弦、解余弦不等式、求含 $\cos x$ 型的函数的定义域、解不含参数的一元二次不等式

【分析】根据题意, 由函数的解析式可得 $-2\cos^2x+\cos x+1\geq 0$ , 求出 $x$ 的取值范围, 即可得到函数的定义域.

【详解】 $y=\sqrt{2\sin^2x+\cos x-1}=\sqrt{2-2\cos^2x+\cos x-1}=\sqrt{-2\cos^2x+\cos x+1}$ ,

则 $-2\cos^2x+\cos x+1\geq 0$ , 解得 $-\frac{1}{2}\leq \cos x\leq 1$ ,

所以 $2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$ ,

即函数的定义域为 $\{x|2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\}$ .

故答案为:  $\{x|2k\pi-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq 2k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\}$

7. 一袋中装有2个红球, 3个黑球, 现从中任意取出一球, 然后放回并放入2个与取出的球颜色相同的球, 再从袋中任意取出一球, 然后放回并再放入2个与取出的球颜色相同的球,

一直重复相同的操作，则第二次取出的球是黑球的概率为\_\_\_\_\_；在第一次取出的球是红球的条件下，第2次和第4次取出的球都是黑球的概率为\_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{3}{5}$   $\frac{5}{21}$

【难度】0.4

【知识点】计算古典概型问题的概率、计算条件概率、利用全概率公式求概率

【分析】记  $A_i$  表示第  $i$  次取到黑球， $i=1,2,3,4$ ，根据已知条件结合全概率公式即可求解；根据已知条件利用样本空间法即可求解.

【详解】记  $A_i$  表示第  $i$  次取到黑球， $i=1,2,3,4$ ，

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}; \\ n(\overline{A_1}A_2A_3A_4) &= 2 \times 3 \times 5 \times 7, \quad n(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4) = 2 \times 3 \times 4 \times 5, \\ n(\overline{A_1}) &= 2 \times 7 \times 9 \times 11, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_2A_4|\overline{A_1}) &= P(A_2A_3A_4|\overline{A_1}) + P(A_2\overline{A_3}A_4|\overline{A_1}) \\ &= \frac{n(\overline{A_1}A_2A_3A_4)}{n(\overline{A_1})} + \frac{n(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4)}{n(\overline{A_1})} \\ &= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 7 \times 9 \times 11} + \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 7 \times 9 \times 11} = \frac{5}{21}. \end{aligned}$$

故答案为：  $\frac{3}{5}, \frac{5}{21}$ .

### 三、解答题

8. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - 2 \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调递增区间；

(2) 求  $f(x)$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最值.

【答案】(1)  $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z})$ ; (2) 最大值为2，最小值为  $-\sqrt{3}$ .

【难度】0.65

【知识点】求  $\sin x$  的函数的单调性、求含  $\sin x$ (型)函数的值域和最值、辅助角公式

【分析】(1) 利用二倍角的正弦公式、二倍角的余弦公式以及两角和的正弦公式将函数  $f(x)$  化为  $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ ，利用正弦函数的单调性解不等式，可得到函数  $f(x)$  的递增区间；(2) 当  $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$  时， $2x+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ ，由正弦函数的单调性可得  $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ ，从而可得结果.

$$\begin{aligned}\text{【详解】}(1) \text{ 函数 } f(x) &= \sqrt{3}\cos 2x - 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + 1 = \sqrt{3}\cos 2x - \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x \\ &= 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right);\end{aligned}$$

$$\text{令 } 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{解得 } k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的单调递增区间为 } \left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbb{Z});$$

$$(2) \text{ 当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

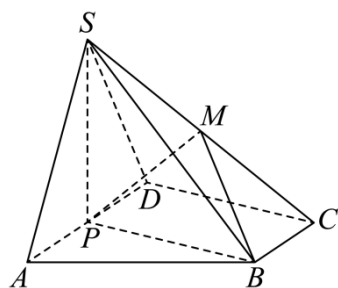
$$\therefore \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right],$$

$$\therefore f(x) \text{ 在区间 } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 上的最大值为 } 2, \text{ 最小值为 } -\sqrt{3};$$

$$\text{且 } x = \frac{\pi}{12} \text{ 时 } f(x) \text{ 取得最大值 } 2, x = \frac{\pi}{2} \text{ 时 } f(x) \text{ 取得最小值 } -\sqrt{3}$$

【点睛】本题主要考查二倍角的正弦公式、二倍角的余弦公式以及两角和的正弦公式以及正弦函数的单调性，属于中档题. 函数  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0$ ) 的单调区间的求法：把  $\omega x + \varphi$  看作是一个整体，由  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 求得函数的减区间；由  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  求得函数的增区间.

9. 如图，在四棱锥  $S-ABCD$  中，底面  $ABCD$  为直角梯形， $AD \parallel BC, AD \perp DC$ ，平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD, P$  为  $AD$  的中点， $SA = SD = 2, BC = \frac{1}{2}AD = 1, CD = \sqrt{3}$ .



- (1) 求证:  $SP \perp AB$ ;
- (2) 求直线  $BS$  与平面  $SCD$  所成角的正弦值;
- (3) 设  $M$  为  $SC$  的中点, 求平面  $SPB$  与平面  $PBM$  的夹角余弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(3)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【难度】0.65

【知识点】面面垂直证线面垂直、线面角的向量求法、面面角的向量求法

【分析】(1) 根据面面垂直性质定理证明  $SP \perp$  平面  $ABCD$ , 原题即得证;

(2) 以  $P$  为坐标原点, 建立空间直角坐标系  $P-xyz$ , 利用向量法求直线  $BS$  与平面  $SCD$  所成角的正弦值;

(3) 证明  $AP \perp$  平面  $SBP$ , 再利用向量法求平面的夹角的余弦值.

【详解】(1) 在  $\triangle SAD$  中,  $\because SA = SD$ ,  $P$  为  $AD$  的中点,  $\therefore SP \perp AD$ ,

$\because$  平面  $SAD \perp$  平面  $ABCD$ , 且平面  $SAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ ,  $SP \subset$  平面  $SAD$ ,

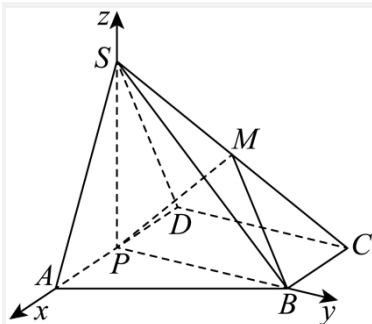
$\therefore SP \perp$  平面  $ABCD$ , 又  $AB \subset$  平面  $ABCD$ ,  $\therefore SP \perp AB$ .

(2) 在直角梯形  $ABCD$  中,  $\because AD \parallel BC$ ,  $BC = \frac{1}{2}AD$ ,  $P$  为  $AD$  中点,

$\therefore BC \parallel PD$ , 且  $BC = PD$ , 则四边形  $BCDP$  为平行四边形,

$\because AD \perp DC$ ,  $\therefore AD \perp PB$ ,

由 (1) 可知,  $SP \perp$  平面  $ABCD$ , 故以  $P$  为坐标原点, 建立空间直角坐标系  $P-xyz$ ,



则  $P(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,\sqrt{3},0)$ ,  $S(0,0,\sqrt{3})$ ,  $C(-1,\sqrt{3},0)$ ,  $D(-1,0,0)$ ,

$$\therefore \vec{BS} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad \vec{CD} = (0, -\sqrt{3}, 0), \quad \vec{SD} = (-1, 0, -\sqrt{3}),$$

设平面  $SCD$  的一个法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{CD} = -\sqrt{3}y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{SD} = -x - \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{取 } z = 1, \text{得 } x = -\sqrt{3}, y = 0,$$

所以  $\vec{n} = (-\sqrt{3}, 0, 1)$  为平面  $SCD$  的一个法向量;

设直线  $BS$  与平面  $SCD$  所成角为  $\alpha$ ,

$$\text{则 } \sin \alpha = |\cos \angle \vec{n}, \vec{BS}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BS}|}{|\vec{n}| |\vec{BS}|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$\therefore$  直线  $BS$  与平面  $SCD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ;

(3)  $\because AP \perp SP$ ,  $AP \perp BP$ ,  $SP \cap BP = P$ ,  $SP, BP \subset$  平面  $SBP$ ,

$\therefore AP \perp$  平面  $SBP$ , 即  $\vec{PA} = (1, 0, 0)$  为平面  $SPB$  的一个法向量,

$\because M$  为  $SC$  的中点,

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 而 } \vec{PB} = (0, \sqrt{3}, 0), \quad \vec{PM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

设平面  $MPB$  的一个法向量为  $\vec{m} = (x_0, y_0, z_0)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{PB} = \sqrt{3}y_0 = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{PM} = -\frac{1}{2}x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_0 = 0 \end{cases},$$

取  $z_0 = 1$ ,  $x_0 = \sqrt{3}, y_0 = 0$ ,

所以  $\vec{m} = (\sqrt{3}, 0, 1)$  为平面  $MPB$  的一个法向量.

$$\therefore \cos \vec{m}, \overrightarrow{PA} = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{PA}|}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{PA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2 \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore$  平面  $SPB$  与平面  $PBM$  的夹角余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

10. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ . 满足  $(2a-c)\cos B = b\cos C$ .

(1) 求角  $B$  的大小;

(2) 设  $a=4, b=2\sqrt{7}$ .

(i) 求  $c$  的值;

(ii) 求  $\sin(2C+B)$  的值.

**【答案】** (1)  $\frac{\pi}{3}$

(2) (i)  $c=6$ ; (ii)  $-\frac{5\sqrt{3}}{14}$

**【难度】** 0.85

**【知识点】** 用和、差角的正弦公式化简、求值、二倍角的余弦公式、正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

**【分析】** (1) 利用正弦定理和诱导公式求解即可.

(2) (i) 利用余弦定理求解即可; (ii) 利用二倍角公式, 两角和的正弦定理结合即可求解.

**【详解】** (1) 由  $(2a-c)\cos B = b\cos C$ ,

根据正弦定理得,  $(2\sin A - \sin C)\cos B = \sin B \cos C$ ,

可得  $2\sin A \cos B = \sin(B+C) = \sin A$ ,

因为  $0 < A < \pi$ , 故  $\sin A \neq 0$ , 则  $\cos B = \frac{1}{2}$ ,

又  $0 < B < \pi$ , 所以  $B = \frac{\pi}{3}$ .

(2) 由 (1) 知,  $B = \frac{\pi}{3}$ , 且  $a=4, b=2\sqrt{7}$ ,

(i) 则  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ,

即  $\frac{1}{2} = \frac{16 + c^2 - 28}{2 \times 4 \times c}$ , 解得  $c = -2$  (舍),  $c = 6$ .

故  $c = 6$ .

(ii) 由  $(2a-c)\cos B = b\cos C$ ,

$$\text{得}(2 \times 4 - 6) \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{7} \cos C,$$

$$\text{解得} \cos C = \frac{\sqrt{7}}{14}, \text{ 则 } \sin C = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{则 } \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

$$\cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -\frac{13}{14},$$

$$\text{则 } \sin(2C + B) = \sin 2C \cos B + \cos 2C \sin B$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{14} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{13}{14}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{5\sqrt{3}}{14}.$$